

A Brief Survey of Operations Research Models for Warehouse Design and Operation

Gilles Cormier, Ph.D., P.Eng.
Associate Professor of Industrial Engineering
Université de Moncton

The design and operation of a warehouse entails many challenging problems, and it is the purpose of this paper to provide a brief outline of representative operations research models which can help solve them. Problems which will be addressed can be classified into three major categories: warehouse design models, throughput capacity models, and storage capacity models. The paper concludes by identifying future research opportunities.

Warehouse Design Models

Warehouse design models attempt to optimize such things as the orientation of storage racks, the allocation of space among competing uses, the number of cranes and the overall configuration of the facility. For instance, Bassan, Roll and Rosenblatt (1980) compared two alternative shelf arrangements, considering material handling cost, annual cost per unit of storage area, and annual cost per unit length of external walls. The analysis yields the optimum number of storage spaces along a shelf, number of shelves, location of doors, as well as warehouse dimensions.

Looking at a more global design problem, Park and Webster (1989) compared alternative warehousing systems on the basis of the following factors: control procedure, handling equipment movement, storage assignment rule, input and output patterns for product flow, storage rack structure, and the economics of each storage system.

Also quite common in evaluating warehouse designs is the use of computer simulation, given the complexity and stochastic nature of such systems. An

interesting hybrid method was developed by Rosenblatt, Roll and Zyser (1993), in which output values are passed back and forth between an analytical optimization model and a simulation model until target values of the

Quelques modèles d'aide à la décision pour l'optimisation des entrepôts

Gilles Cormier, Ph.D., ing.
Professeur agrégé de génie industriel
Université de Moncton

La recherche opérationnelle peut être très utile pour le design et l'exploitation efficace d'entrepôts. Cet exposé présente brièvement quelques problèmes typiques que l'on retrouve dans le domaine, soit au niveau du design, soit dans l'optimisation de la capacité de débit et de la capacité de stockage. Des problèmes de recherche seront finalement proposés.

La modélisation des problèmes de design d'entrepôts

Le design d'entrepôts doit répondre aux questions d'aménagement intérieur et extérieur, à partir du nombre de palettiers jusqu'aux proportions extérieures de l'édifice, en passant par le nombre d'engins de manutention, entre autres. Par exemple, Bassan, Roll et Rosenblatt (1980) ont analysé deux configurations de palettiers, en considérant les coûts de manutention ainsi que les coûts annuels associés aux aires de stockage et aux murs extérieurs. Les résultats du modèle incluent la densité du stockage par palettier, le nombre de palettiers, l'emplacement des portes, ainsi que les dimensions externes de l'édifice.

De leur côté, Park et Webster (1989), prenant une vue plus globale, ont comparé des systèmes d'entreposage par rapport aux procédures de contrôle, au nombre de déplacements des engins de manutention, aux politiques de rangement des produits, aux flux des produits, à la configuration des palettiers, et aux coûts.

Par ailleurs, il n'est pas rare de voir la simulation par ordinateur appliquée à l'étude des systèmes d'entreposage, vu la nature complexe et stochastique de ceux-ci. Une méthode proposée par Rosenblatt, Roll et Zyser (1993) a la caractéristique intéressante d'itérer entre un modèle d'optimisation analytique et un modèle de simulation jusqu'à ce que les mesures de performance visées soient réalisées.

L'optimisation de la capacité de débit

L'importance des coûts du prélèvement des commandes est sans doute la raison principale pour laquelle la recherche opérationnelle est devenue un

performance measures are attained.

Throughput Capacity Models

Throughput capacity issues have received the most attention to date in the operations research literature, and this probably makes sense, given that order picking costs are often perceived as dominating other costs. In turn, policies which influence throughput capacity encompass storage assignment, batching and picking. The former assign arriving items to available locations in the warehouse, with the objective of minimizing either material handling costs (or equivalently, maximizing throughput) or material handling costs plus inventory costs. For their part, batching policies assign orders to be picked to tours of the order picking vehicle, while picking policies solve travelling salesperson problems (TSP's). We now proceed with a description of these three problem categories.

Picking Policies

What makes picking different from the standard TSP is the geometry of the warehouse, with travel either restricted to a single cartesian axis at a time (rectilinear norm), or occurring simultaneously in both cartesian axes, usually at different speeds (Chebychev norm), or else confined to aisles.

The band heuristic divides a Chebychev rack into a number of horizontal bands, with picking performed following a serpentine path defined by those bands. Bozer (1985) derived an analytical expression for the corresponding expected tour length as well as the optimal number of bands as a function of the number of picks.

Assuming a warehouse with a single block of parallel aisles with crossovers allowed only at the ends of the aisles, Ratliff and Rosenthal (1983) developed an efficient

procedure for finding an optimal picking sequence based on graph theory. In addition, there are also cases in which orders are assigned due-dates. For instance, Elsayed, Lee, Kim and Scherer (1993) formulated a penalty function which incorporates the earliness and tardiness of the orders, and minimized it using a priority index methodology.

outil de choix pour l'étude des problèmes de manutention en entrepôts. Les éléments pouvant affecter le débit comprennent les politiques de rangement, les politiques de groupage et les politiques de prélèvement. Les premières voient à l'affectation des produits aux aires de stockage, avec comme objectif la minimisation des coûts de manutention (ou de façon équivalente, la maximisation du débit), ou autrement la minimisation simultanée des coûts de manutention et des coûts d'inventaire. Enfin, la raison d'être des politiques de groupage est d'affecter les commandes aux trajets de véhicule, tandis que celle des politiques de prélèvement est d'optimiser les trajets mêmes. Nous discutons ci-après ces trois politiques.

Politiques de prélèvement

Si le problème de prélèvement des commandes est bel et bien un problème de voyageur de commerce, il a aussi des particularités issues des caractéristiques géométriques des entrepôts. En effet, l'engin de manutention peut se déplacer soit selon une norme rectilinéaire (c'est-à-dire le long d'un seul axe cartésien à la fois), soit selon une norme Chebychev (simultanément dans les deux axes cartésiens, quoique souvent à différentes vitesses), ou autrement le long des allées d'un entrepôt classique.

Pour le cas d'une norme Chebychev, Bozer (1985) décrit un algorithme de routage qui consiste à diviser le palettier en bandes horizontales; le prélèvement s'effectue alors suivant un trajet sinueux le long de ces bandes. Bozer trouve aussi des expressions analytiques pour la longueur espérée des tournées de véhicule et pour le nombre optimal de bandes en fonction du nombre de prélèvements.

En supposant un entrepôt constitué d'un seul bloc de palettiers parallèles avec des allées perpendiculaires à ceux-ci situées uniquement à leurs deux extrémités, Ratliff et Rosenthal (1983) ont développé une procédure efficace pour le prélèvement des commandes à partir de la théorie des graphes. De leur côté, Elsayed, Lee, Kim et

Scherer (1993) ont formulé un index de priorité leur permettant de minimiser la somme pondérée du retard et de l'avance des commandes lorsque des dates de livraison exigibles sont spécifiées.

Politiques de groupage

Bien entendu, la qualité du prélèvement est sujette à l'efficacité du groupage. Il faut toutefois remarquer que le groupage ne conduit pas forcément à la

Batching Policies

It goes without saying that the objective value yielded by any picking algorithm is bound by the efficiency of batching. Note, however, that batching does not necessarily minimize all relevant costs, considering that it gives rise to an order consolidation phase which includes accumulation and sortation, with increased management, equipment and area costs relative to single-order picking.

Hwang, Baek and Lee (1988) proposed a clustering algorithm for batching in a Chebychev rack. Meanwhile, for the case of a classical rectangular warehouse, Gibson and Sharp (1992) found that the method which outperforms the others consists of starting a new batch with an arbitrary seed order, and then augmenting the batch with other orders by minimizing a certain distance measure, starting new batches as necessary to ensure that vehicle capacity is not exceeded. The key to the efficiency of this algorithm is obviously the accuracy of the distance measure, which is obtained without solving any TSP's.

Storage Assignment Policies

The two main classes of storage assignment policies are dedicated storage and shared storage. In the former, a set of storage locations is reserved for each product for the duration of the planning horizon, while the latter allows units of different products to successively occupy the same location.

The earliest dedicated storage algorithm is Heskett's (1963) cube-per-order index (COI) rule, where the COI of an item is defined as the ratio of the item's total required space (which is proportional to the

replenishment lot size) to its turnover frequency (reflecting the number of trips per period). The algorithm consists of locating the items with the lowest COI closest to the dock, and to assign items to locations progressively farther away from the dock by increasing COI.

Goetschalckx and Ratliff (1990) proposed a shared storage policy based on the sojourn time of individual units of product, and demonstrated significant reductions in rack size and travel time relative to dedicated storage. Further, another class of storage

minimisation de tous les coûts pertinents, étant donné l'étape de consolidation des commandes qui doit suivre le prélèvement, donnant ainsi lieu à des coûts additionnels de gestion, d'équipement et d'espace par rapport aux systèmes dans lesquels chaque commande est prélevée individuellement.

Pour le cas d'un palettier Chebychev, Hwang, Baek et Lee (1988) ont proposé un algorithme de groupage faisant appel à la technique statistique de regroupement, tandis que Gibson et Sharp (1992) à leur tour se sont plutôt intéressés aux entrepôts classiques rectangulaires. La méthode que ces derniers élaborent commence par l'initiation d'un nouveau groupe par le choix arbitraire d'une première commande. À celle-ci viennent s'ajouter les commandes ayant la valeur minimale d'une certaine mesure de distance entre les commandes, en s'assurant toujours de ne pas excéder la capacité du chariot et en commençant des nouveaux groupes au besoin. La qualité de la solution dépend évidemment de l'exactitude de la mesure de distance, que l'on évalue sans pour autant solutionner de problème de voyageur de commerce.

Politiques de rangement des produits

Les deux grandes catégories de politiques de rangement sont le rangement dédié et le rangement partagé. Avec la première méthode, chaque produit est affecté à un ensemble d'emplacements pour la durée entière de l'horizon de planification, alors qu'avec la deuxième méthode, différents produits peuvent se succéder aux mêmes emplacements.

Heskett (1963) fut le premier à proposer un algorithme pour une politique de rangement dédié, dans le cadre duquel un index est calculé pour tous les produits. L'index en question, connu sous l'acronyme COI ("cube-per-order-index"), est obtenu en faisant le rapport de l'espace requis (qui est proportionnel à la taille du lot de

réapprovisionnement) sur la demande périodique (réflétant le nombre de voyages requis pour le prélèvement). L'algorithme consiste à placer les produits ayant la plus petite valeur du COI à proximité du quai. Les autres produits sont alors assignés séquentiellement aux emplacements de plus en plus éloignés du quai selon l'ordre croissant du COI.

Goetschalckx et Ratliff (1990), se penchant sur la question du rangement partagé, spécifiquement celui basé sur la durée du séjour des produits dans l'entrepôt, ont démontré des réductions considérables dans la grosseur des palettiers ainsi que dans les temps de trajet par rapport au rangement dédié. Par

assignment problems, first introduced by Wilson (1977), jointly establishes a dedicated storage policy and an inventory policy.

Storage Capacity Models

Most attempts at modelling storage capacity have assumed lot sizes to be given; this is not unreasonable in those instances where the purchasing department performs its functions independently of the warehouse. In fact, Cormier and Gunn (1996a) showed that such a sequential policy is near-optimal if the products are characterized by a very high purchasing cost relative to the marginal cost of the storage space (jewels are a good example of this). By assuming that demand for space is specified by a probability mass function, White and Francis (1971) did effectively take this approach, which enabled them to derive network flow formulations for some multi-period warehouse leasing problems.

By contrast, if the items are fairly voluminous and inexpensive, e.g., sheets of polystyrene thermal insulation, then it is more appropriate to optimize inventory costs and space costs together. On this premise, Cormier and Gunn (1997) tackled a warehouse sizing problem in which product demands vary arbitrarily over a finite planning horizon and the expansion cost consists of fixed and variable components. The state variable and the stages in their proposed dynamic programming formulation correspond to the warehouse size and time periods, respectively.

Moreover, under constant product demand, Cormier and Gunn (1996b) demonstrated through both analytical and numerical means that it can be worthwhile to lease space temporarily at the beginning of each inventory cycle. Hence, the framework of Cormier and Gunn (1997) was extended to allow leasing by Cormier (1997).

Concluding remarks

Cormier and Gunn (1992) and Montulet, Langevin and Riopel (1995) provide more detailed surveys of operations research models for warehouse design and operation. The following problems have to date received little attention in the operations research literature and thus offer excellent research potential: i)

ailleurs, Wilson (1977) a défini une problématique permettant d'établir conjointement une politique de rangement dédié et une politique d'inventaire.

L'optimisation de la capacité de stockage

Très souvent, on retrouve dans la littérature des études d'optimisation de la capacité de stockage qui prennent pour acquis que la taille des lots de réapprovisionnement soit connue. Cette hypothèse peut certainement être défendue dans le cas où les achats sont effectués indépendamment de la fonction entreposage, même que Cormier et Gunn (1996a) ont démontré qu'une telle pratique est quasi-optimale lorsque le coût d'acquisition des produits est de beaucoup supérieur au coût marginal de l'espace de stockage (c'est par exemple le cas avec des bijoux). En supposant une demande périodique en espace spécifiée par une fonction de probabilité discrète, White et Francis (1971) ont d'ailleurs utilisé cette approche, ce qui leur a permis d'optimiser la sous-traitance d'espace avec des modèles de réseaux.

Néanmoins, dans le cas d'articles volumineux et peu dispendieux, e.g., des feuilles d'isolation thermique en polystyrène, mieux vaut optimiser à la fois les coûts d'inventaire et d'espace. Cormier et Gunn (1997) modélisent un tel problème de dimensionnement d'entrepôt dans lequel la demande de chaque produit varie arbitrairement dans le temps et le coût d'expansion de la capacité comprend des éléments fixe et variable. Un programme dynamique est proposé, la variable d'état et les stades représentant la grosseur de l'entrepôt et les périodes, respectivement.

En plus, par le biais de méthodes analytiques et numériques, Cormier et Gunn (1996b) ont démontré, pour le cas d'une demande constante, que les coûts peuvent être réduits en louant temporairement de l'espace de stockage au début de chaque cycle d'inventaire. Cette observation a par conséquent incité Cormier (1997) à élargir le cadre de l'étude de Cormier et Gunn (1997) pour permettre la sous-traitance.

Conclusion

Des renseignements additionnels sur la modélisation des problèmes d'entreposage sont donnés par Cormier et Gunn (1992) et Montulet, Langevin et Riopel (1995). Rarement abordés dans la littérature, les problèmes suivants offrent d'intéressantes possibilités de recherche: i) les problèmes de prélèvement avec dates de livraison exigibles, ii) le groupage optimal de commandes, avec et sans dates de livraison exigibles,

order picking problems with due-dates, ii) optimal order batching, with and without due-dates, iii) shared storage policies, iv) joint storage capacity and throughput capacity planning, v) storage capacity planning with discrete expansion sizes, and vi) storage capacity planning with various underlying inventory policies.

Acknowledgements: The author gratefully acknowledges financial support from the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and from the Faculty of Graduate Studies and Research of the Université de Moncton.

iii) les politiques de rangement partagé, iv) l'optimisation conjointe de la capacité de stockage et de la capacité de débit, v) l'optimisation de la capacité de stockage avec des grosseurs d'expansion discrètes, et vi) l'optimisation de la capacité de stockage avec diverses politiques d'inventaire sous-jacentes.

Remerciements: L'auteur bénéficie de l'appui financier de la Faculté des études supérieures et de la recherche de l'Université de Moncton ainsi que du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada.

References (Références)

- Bassan Y., Roll Y., Rosenblatt M.J., (1980), "Internal Layout Design of a Warehouse", *AIIE Transactions*, 12/4, 317-322.
- Bozer Y. A., (1985), "Optimizing Throughput Performance in Designing Order Picking Systems", Unpublished Ph.D. Dissertation, Atlanta, GA: Georgia Institute of Technology.
- Cormier G., (1997), "On the Optimization of Storage Capacity with Outsourcing in a Dynamic Demand Situation", *Proceedings of the Third International Symposium on Logistics*, University of Padua, Italy.
- Cormier G., Gunn E.A., (1992), "A Review of Warehouse Models", *European Journal of Operational Research*, 58/1, 3-13.
- Cormier G., Gunn E.A., (1996a), "Simple Models and Insights for Warehouse Sizing", *Journal of the Operational Research Society*, 47, 690-696.
- Cormier G., Gunn E.A., (1996b), "On the Coordination of Warehouse Sizing, Leasing and Inventory Policy", *IIE Transactions*, 28, 149-154.
- Cormier G., Gunn E.A., (1997), "A Model for Capacity Expansion Planning in Warehousing", *Proceedings of the Sixth Industrial Engineering Research Conference*, Norcross, GA: Institute of Industrial Engineers.
- Elsayed E.A., Lee M.-K., Kim S., Scherer E., (1993). "Sequencing and Batching Procedures for Minimizing Earliness and Tardiness Penalty of Order Retrievals", *International Journal of Production Research*, 31/3, 727-738.
- Gibson D.R., Sharp G.P., (1992), "Order Batching Procedures", *European Journal of Operational Research*, 58/1, 58-67.
- Goetschalckx M., Ratliff H.D., (1990), "Shared Storage Policies Based on the Duration Stay of Unit Loads", *Management Science*, 36/9, 1120-1132.
- Heskett J.L., (1963), "Cube-per-Order Index - A Key to Warehouse Stock Location", *Transportation and Distribution Review*, 3, 27-31.
- Hwang H., Baek W., Lee M.-K., (1988), "Clustering Algorithms for Order Picking in an Automated Storage and Retrieval System", *International Journal of Production Research*, 26/2, 189-201.
- Montulet P., Langevin A., Riopel D., (1995), "Entreposage: méthodes de rangement", Report No. G-95-18, Montréal: GÉRAD.

Park Y.H., Webster D.B., (1989), "Modelling of Three-Dimensional Warehouse Systems", *International Journal of Production Research*, 27/6, 985-1003.

Ratliff H.D., Rosenthal M.J., (1983), "Order-Picking in a Rectangular Warehouse: A Solvable Case of the Travelling Salesman Problem", *Operations Research*, 31/3, 507-521.

Rosenblatt M.J., Roll Y., Zyser V., (1993), "A Combined Optimization and Simulation Approach for Designing Automated Storage/Retrieval Systems", 25/1, 40-50.

White J.A., Francis R.L., (1971), "Normative Models for some Warehouse Sizing Problems", *AIIE Transactions*, 9/3, 185-190.

Wilson H.G., (1977), "Order Quantity, Product Popularity, and the Location of Stock in a Warehouse", *AIIE Transactions*, 9/3, 230-237.
